RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA, II r. INF, PPT.
Lista zadań nr 3
2015/16

1. Rzucamy dwa razy kostką. Jeśli w obu rzutach wypadnie ta sama liczba oczek, wygrywamy PLN 100. Jeśli w pierwszym rzucie wypadnie większa liczba oczek niż w drugim, wygrywamy PLN 50. W każdym innym przypadku przegrywamy PLN 20. Obliczyć średnią wygraną w tej grze.

2. Rzucamy dwa razy kostką. Jeśli w obu rzutach wypadnie ta sama liczba oczek, to rzucamy raz monetą. Jeśli w tym rzucie monetą wypadnie orzeł, wygrywamy PLN 100. Jeśli w obu rzutach kostką nie wypadnie ta sama liczba oczek, przegrywamy (w PLN) łączną liczbę oczek. Obliczyć średnią wygraną w tej grze.

3. Rzucamy n razy monetą. Wygrywamy tyle złotych, ile razy wypadnie orzeł. Obliczyć średnią wygraną w tej grze.

4. Rzucamy n razy monetą. Jeśli wypadnie więcej orłów niż reszek wygrywamy PLN 1. W przeciwnym wypadku przegrywamy PLN 1. Obliczyć średnią wygraną w tej grze.

5. Poruszamy się po zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, zaczynając spacer od punktu 0. W każdym, kroku idziemy do sąsiedniego punktu, uprzednio losując z jednakowym prawdopodobieństwem jednen z dwóch kierunków. Obliczyć średnią odległość od początku spaceru po 2, 3, 4, n ruchach.

6. Niech $X : \Omega \to [0,1]$ będzie zmienną losową przyjmującą na zdarzeniach elementarnych ze zdarzenia A (tzn. na argumentach z A) wartości nie większe niż 1/2. Udowodnić, że $EX \leq \frac{5}{6}$, jeśli $P(A) \geq \frac{1}{3}$.

7. Przypomnieć z wykładu definicję wariancji zmiennej losowej i dowód, że $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$.

8. Obliczyć wariancję dla zmiennej losowej opisującej grę z zadania 1.

9. Niech $A \subseteq \Omega$. Niech $X = \mathbf{1}_A$ (tzn. $X(\omega) = 1$, jeśli $\omega \in A$ i $X(\omega) = 0$, jeśli $\omega \notin A$; jeszcze inaczej mówiąc: X jest indykatorem zdarzenia A). Pokazać, że $Var(X) = P(A)(1 - P(A))$. Jaka może być maksymalna wartość wariancji dla takiej zmiennej losowej?

10. Niech $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ i $P(\{\omega_i\}) > 0$, dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Udowodnić, że jeśli $Var(X) = 0$, to X jest stała.