Teoretyczne podstawy informatyki - 2011
Lista nr 3 na 26 października

Zadanie 1 Udowodnić, że zbiór liczb pierwszych jest rekurencyjny (tzn. że istnieje całkowita funkcja rekurencyjna będąca funkcją charakterystyczną zbioru liczb pierwszych).

Zadanie 2 Udowodnij, że następujące definicje są równoważne:

Definicja 1 (z wykładu) Zbiór $A \subseteq N$ jest rekurencyjnie przeliczalny jeżeli

$$n \in A \iff \exists_{m \in N}(n, m) \in R$$

dla pewnego zbioru rekurencyjnego $R \subseteq N^2$.

Definicja 2 Zbiór $A \subseteq N$ jest rekurencyjnie przeliczalny jeżeli istnieje całkowita funkcja rekurencyjna f_A taka, że

$$n \in A \iff \exists_{m \in N} f_A(m) = n.$$

Funkcję f_A nazywamy funkcją generującą (lub przeliczającą zbiór) A.

Zadanie 3 Udowodnij, że jeśli funkcja generująca zbiór rekurencyjnie przeliczalny A jest funkcją rosnącą, to zbiór A jest zbiorem rekurencyjnym.

Zadanie 4 Udowodnij, że klasa zbiorów rekurencyjnych zawartych w N jest zamknięta na sumę, przekrój i dopełnienie.

Zadanie 5 Udowodnij, że klasa zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych zawartych w N jest zamknięta na sumę i przekrój.

Co by spowodowało udowodnienie zamkniętości na dopełnienie?

Zadanie 6 Udowodnij, że jeśli $f : N \to N$ jest całkowitą funkcją rekurencyjną a zbiór A jest rekurencyjnie przeliczalny to $f(A)$ (zbiór wartości funkcji f na dziedzinie ograniczonej tylko do A) jest także zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.

Zadanie 7 Udowodnij, że każdy nieskończony zbiór rekurencyjnie przeliczalny zawiera nieskończony podzbiór rekurencyjny.